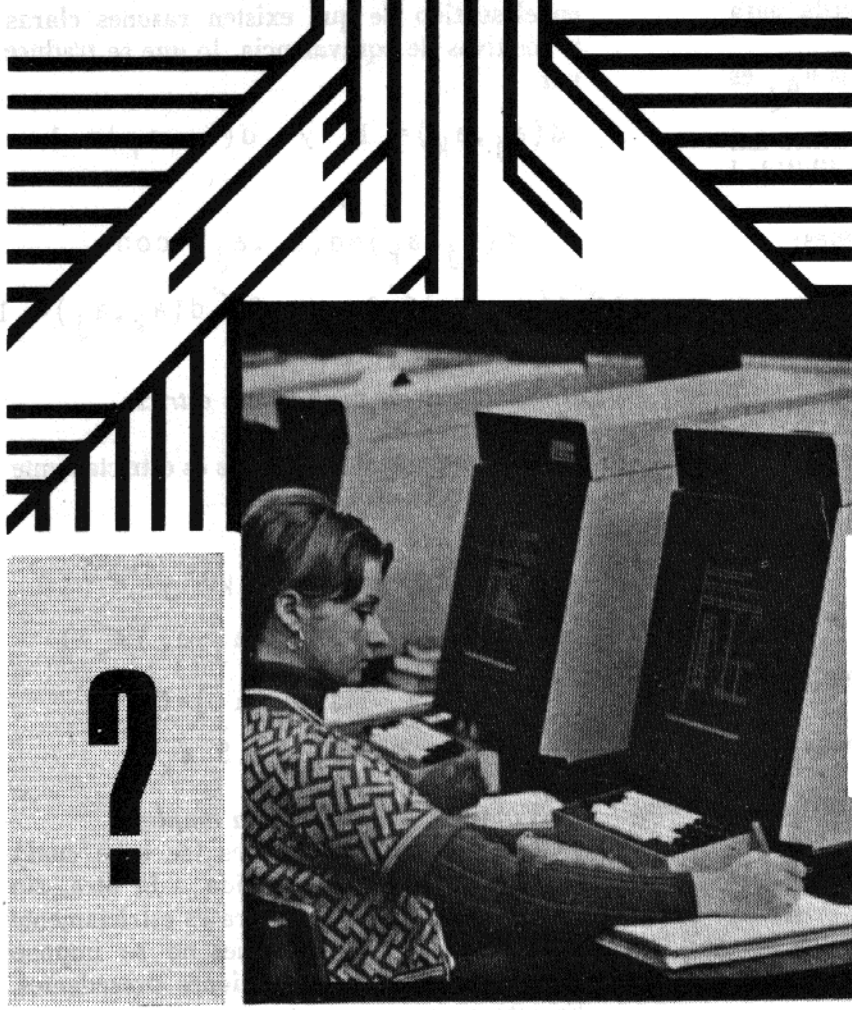
ANALISIS MULTICRITERIO EN UN CONTEXTO IMPRECISO



G. LASSIBILLE y C. PARRON

INSTITUTO DE MATEMATICAS ECONOMICAS
FACULTADAD DE CIENCIA ECONOMICA Y DE GESTION
UNIVERSIDAD DE DIJON
4, BOULEVARD GABRIEL 21000
DIJON (FRANCIA)

* Fernando Ibarra Aispuro

Segunda y Ultima Parte

II-2. *Relación de dominancia imprecisa.*

Las relaciones de dominancia presentadas anteriormente conducen a la misma conclusión, a saber: una acción en dominancia no domina a otra. Solo el método Electra II permite un ligero matiz gracias a la introducción de una relación de dominancia fuerte y de una relación de dominancia débil. Esta introducción sugiere naturalmente la definición de una relación de dominancia borrosa que exprese que una acción domina más o menos a otra.

II-2-1. *Definición y propiedad del concepto de dominancia imprecisa.*

Este concepto se introduce cuando se acepta ser más o menos exigente para admitir la dominancia. Una relación de dominancia borrosa, $\underset{\sim}{S}$, puede ser caracterizada por la definición de un grado de credibilidad

Traducido por: Dr: © Fernando Ibarra Aispuro, del Centro de Investigación de la Sección de Graduados de E.S.C.A. I.P.N

$d(a_j, a_k)$, que el modelador acuerda para cada par de acciones, a la hipótesis "a_j es para el tomador de decisiones al menos tan buena que a_k". Este grado de credibilidad debe poseer las propiedades siguientes:

a) $d(a_j, a_k)$ hace intervenir a_j y a_k a través de sus evaluaciones en una familia g de m criterior. Es decir, $d(a_j, a_k)$ es una función de los $\gamma_i(a_j)$ y $\gamma_i(a_k)$ cualquiera que sea $I \in I$.

b) $d(a_j, a_k)$ es más grande en la medida que la dominancia de a_k por a_j es más "precisa". $d(a_j, a_k)$ es una función no decreciente de $\gamma_i(a_j)$ y no creciente de $\gamma_i(a_k)$.

c) $d(a_j, a_k)=1$ traduce una dominancia cierta de a_k por a_j.

Todas estas propiedades implican que el grado de credibilidad es un número comprendido entre cero y uno.

Podemos entonces deducir cuatro situaciones diferentes en lo que se refiere a la dominancia.

a) Situación de indiferencia.

Las dos acciones a_j y a_k son indiferentes en el sentido de que existen razones claras y positivas de equivalencia, lo que se traduce por

$$d(a_j, a_k) = 1 \quad y \quad d(a_j, a_k) = 1$$

O

$$d(a_j, a_k) = d(a_k, a_j) \text{ con}$$

$$0 < d(a_j, a_k) < 1 \quad y \quad 0 < d(a_k, a_j) < 1$$

b) Situación de preferencia estricta.

Si una de las dos acciones es estrictamente preferida a la otra tenemos

$$d(a_j, a_k) = 1 \quad y \quad d(a_k, a_j) = 0$$

$$\text{o bien} \quad 0 < d(a_j, a_k) < 1$$

$$y \quad d(a_k, a_j) = 0$$

$$\text{y por tanto } a_j \; S \; a_k$$

c) Situación de preferencia amplia.

Una de las dos acciones (se sabe cual) no es estrictamente preferida a la otra, sin que se pueda decir si la otra es estrictamente preferida o indiferente pues no se impone ninguna de las dos situaciones precedentes. En este caso $d(a_j, a_k) = 1$ y

$$0 < (a_k, a_j) < 1 \longrightarrow a_j \underset{\sim}{S} a_k$$

$$\text{o} \quad 0 < d(a_j, a_k) < 1 \quad y$$

$$0 < d(a_k, a_j) < 1 \longrightarrow a_j \underset{\sim}{S} a_k \quad \text{si}$$

$$d(a_j, a_k) > d(a_k, a_j)$$

d) Situación de incomparabilidad

Las dos acciones a_j y a_k no son comparables en el sentido de que ninguna de las tres situaciones precedentes se imponen. Los grados de credibilidad son nulos.

$$d(a_j, a_k) = d((a_k, a_j) = 0$$

Estos cuatro casos resumen las diferentes situaciones que podemos encontrar para fundamentar la dominancia. Precisemos que el problema de preferencia estricta y el de prerencia amplia se resuelve sin recurrir a otra relación (relación complementaria) como en el caso de la relación de dominancia en un contexto preciso. La definición de tal relación de dominancia borrosa nos permite decir que la acción a_j domina a la acción a_k con un grado de credibilidad $d(a_j, a_k)$. De aquí se desprende que el grafo de dominancia es un grafo borroso, es decir, que los arcos de éste son portadores de un valor $d(a_j, a_k)$ comprendido entre cero y uno. La relación de dominancia borrosa no es en lo general transitiva, pero es posible imponer al grado de credibilidad una condición para dar a $\underset{\sim}{S}$ una forma más o menos debilitada de transitividad. Por ejemplo

$$d(a_j, a_k) \geqslant \min \left[d(a_j, a_h),\ d(a_h, a_k) \right]$$

ó

$$d(a_j, a_k) \geqslant d(a_j, a_h) \cdot d(a_h, a_k)$$

Estos dos condiciones generalizan la noción de dominancia en la medida en la que ésta implica un grado de credibilidad igual (o casi igual) a uno.

También es posible recurrir a la cerradura transitiva $\hat{S}$ de S, pero, como en el caso preciso, ello implica que se acepta tomar más riesgos respecto a la dominancia.

Habiendo construido una relación de dominancia borrosa se puede introducir la relación de dominancia precisa de nivel α, S_α, definida por

$$a_j\ S_\alpha\ a_k \iff d(a_j, a_k) \geqslant \alpha$$

es un umbral cercano a 1 y superior a $1/2$ ver tercera parte).

II-2-2. Evaluación del grado de credibilidad

Podríamos escoger como grado de credibilidad el índice de concordancia utilizado en el método Electra I; en efecto, este último indica, si se consideran los puntos como votos, el porcentaje de votos en favor de la hipótesis que afirma que a_j domina a a_k. Sin embargo eso nos obligaría a pasar por alto la discordancia. Es preferible evaluar el grado de credibilidad a partir del índice de compensación definido anteriormente, ya que éste, como el grado de credibilidad, es función de las evaluaciones

$$\gamma_i(a_j) \quad y \quad \gamma_i(a_k).$$

Recordemos que el índice de compensación es igual a

$$d^0_{jk} = m(a_j, a_k) + M(a_j, a_k)$$
$$/2 \left[M(a_j, a_k) - m(a_j, a_k) \right]$$

Para introducir este grado de credibilidad basta establecer

$$d(a_j, a_k) = \varphi(d_{jk}{}^0)$$

Siendo φ una función monótona no decreciente de cero a uno. Es evidente que se pueden tener tantos tipos de grados de credibilidad como funciones φ existan (una por cada modelador).

Después de haber definido y construido una relación de dominancia borrosa nos falta ver cómo esta relación puede guiar la selección del tomador de decisión.

III. La relación de dominancia imprecisa y la ayuda a la decisión

Vamos a ver cómo seleccionar la mejor acción entre el conjunto A de acciones posibles (sección III-1(y cómo clasificar las diferentes acciones (sección III-2).

III-1. Selección de una mejor acción

En el método Electra I la búsqueda del

núcleo del grafo de dominancia G(p,q) asociado a la relación de dominancia precisa S(p.q) permite seleccionar un conjunto de objetos no comparables dos a dos y que dominan a cualquier otro objeto situado fuera del núcleo. Es raro que el núcleo contenga un solo elemento. Por tanto, es necesario depurarlo. Para hacer ésto buscamos otra relación de dominancia obtenida atenuando la severidad de los umbrales de concordancia y discordancia. Definimos por tanto un conjunto de relaciones de dominancia ajustadas. Podemos operar de manera idéntica en el caso de una relación borrosa descomponiendo la relación y buscando el núcleo de cada grafo preciso asociado a cada una de las relaciones precisas más cercanas.

III-1-1. Descomposición de la relación de imprecisa

Consideramos la relación de dominancia borrosa $\underset{\sim}{S}$ siguiente

$\underset{\sim}{S}$	a_1 ... $a_i a_j$ ... a_n
a_1	
⋮	
a_i	$d(a_i,a_j)$
⋮	
a_j	
⋮	
a_n	

Podemos asociar a esta relación de dominancia borrosa un grafo de dominancia borrosa $\underset{\sim}{G}$ cuyos arcos son valuados entre 0 y 1 (gracias al grado de credibilidad).

Esta relación se puede descomponer conforme al teorema de descomposición enunciado por Kaufmann en su libro "introducción a la théorie des sous-ensembles flous" (p. 67), de la manera siguiente:

$$\underset{\sim}{S} = \bigvee_{\alpha} \alpha \cdot S \quad \text{con} \quad 0.5 \leq \alpha \leq 1$$

donde

$$d^{(\alpha)}(a_i,a_j)=1 \quad \text{si} \quad d(a_i,a_j) \geq \alpha$$
$$=0 \quad \text{si} \quad d(a_i,a_j) < \alpha$$

Definimos así una relación de dominancia precisa de nivel α. Si escogemos dos umbrales α_1 y α_2 tales que

$$\alpha_1 \geq \alpha_2$$

verificamos fácilmente que

$$S_{\alpha_1} \subseteq S_{\alpha_2}$$

lo que significa que si la relación de dominancia precisa S_{α_1} se verifica, entonces S_{α_2} también. Obtenemos, como en Electra I cuando se modifican los umbrales p y q, relaciones de dominancia ajustadas. A partir de *la relación precisa S_α es posible construir el* grafo preciso G_α es decir valuado con 0 ó 1, definido por:

arco$(a_i,a_j) \in G$ si y

solamente si $d^{(\alpha)}(a_i,a_j)=1$

de manera similar, si $\alpha_1 \geq$

α_2, entonces $G_{\alpha_1} \subset G_{\alpha_2}$

El grafo G_α es mucho menos rico que el grafo de dominancia imprecisa debido al hecho de que todos los arcos que portan inicialmente un valor inferior a α son eliminados. La dominancia borrosa da lugar a una dominancia precisa de nivel α, es decir que tenemos desde ahora dos posibilidades para un par de acciones a_i y a_j: una dominancia cierta o una no dominancia cierta.

III-1-2. Búsqueda del núcleo

Sea $\underset{\sim}{S}$ una relación de dominancia borrosa. Podemos descomponerla como se ha indicado anteriormente. Sea S_{α_1} la relación de dominancia precisa de nivel α_1; podemos asociar a esta relación el grafo preciso G_{α_1}. Es posible determinar el subconjunto dominante N_{α_1}, es decir, el núcleo del grafo G_{α_1} (admitimos que el núcleo siempre existe y que es único, a condición que el grafo G_{α_1} posea un número finito de vértices y no posea circuitos). Este conjunto contiene las acciones que dominan ciertamente al nivel α_1 (es decir, con un grado de credibilidad superior o igual a α_1) todas las acciones $A\text{-}N_{\alpha_1}$. Este método conduce pues a un preorden formado por dos clases, el núcleo y su complemento. Si N_{α_1} es un singleton, el problema está resuelto y hemos selecionado la mejor acción. Si no es así, podemos buscar un nuevo subconjunto dominante $N_{\alpha_2} \subset N_{\alpha_1}$, a partir de un nuevo grafo de dominancia precisa G_{α_2} asociado a una relación de dominanci- precisa S_{α_2} tal que $S_{\alpha_1} \subset S_{\alpha_2}$ (es decir, que $0.5 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_1$). Por ejemplo, supongamos un conjunto

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$$

de acciones posibles. Los grados de credibilidad calculados a partir del índice de compensación están dados en la tabla siguiente:

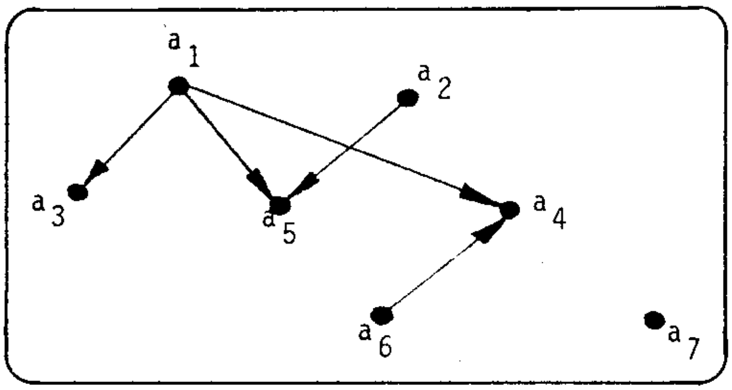
$\underset{\sim}{S}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	-	0.6	0.8	0.9	0.8	0.4	0.3
a_2	0.2	-	0.6	0.5	0.8	0.1	0.4
a_3	0.1	0	-	0.2	0	0.3	0.1
a_4	0	0.1	0.5	-	0.5	0.4	0.2
a_5	0.2	0.1	0.3	0	-	0.2	0.1
a_6	0	0.2	0.5	0.9	0.5	-	0.5
a_7	0	0.1	0	0	0.2	0.4	-

Sea $\alpha_1 = 0.7$. La relación de dominancia precisa de nivel 0.7 es

$\overrightarrow{S}_{0.7}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	-	0	1	1	1	0	0
a_2	0	-	0	0	1	0	0
a_3	0	0	-	0	0	0	0
a_4	0	0	0	-	0	0	0
a_5	0	0	0	0	-	0	0
a_6	0	0	0	1	0	-	0
a_7	0	0	0	0	0	0	-

$d^{(\alpha)}(a_i, a_j) = 1 \quad \text{si} \quad d(a_i, a_j) \geqslant 0.7 \quad = 0 \quad \text{si} \quad d(a_i, a_j) < 0.7$

Obtenemos el grafo $G_{0.7}$ siguiente



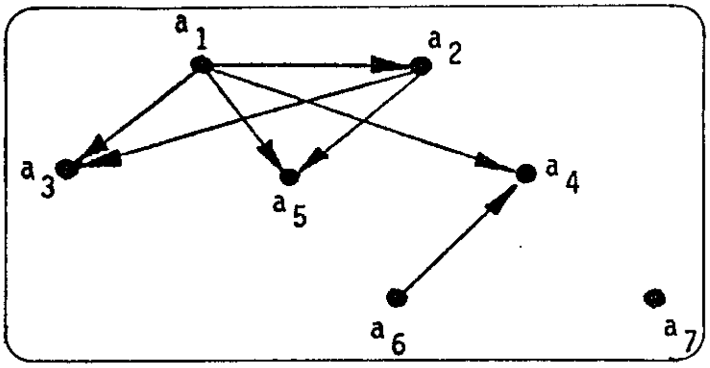
Corresponde a un grado de credibilidad importante (0.7). Como los $d(a_i, a_j)$ no son demasiado elevados, es normal que contenga pocos arcos. El núcleo de este grafo es:

$$N_{0.7} = \{a_1, a_2, a_6, a_7\}$$

Así, las acciones que pertenecen a $N_{0.7}$ dominan a las acciones a_3, a_4 y a_5. Este núcleo no permite seleccionar la mejor acción. Escogemos un nuevo umbral $\alpha_2 = 0.6$

$\overrightarrow{S}_{0.6}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	-	1	1	1	1	0	0
a_2	0	-	1	0	1	0	0
a_3	0	0	-	0	0	0	0
a_4	0	0	0	-	0	0	0
a_5	0	0	0	0	-	0	0
a_6	0	0	0	1	0	-	0
a_7	0	0	0	0	0	0	-

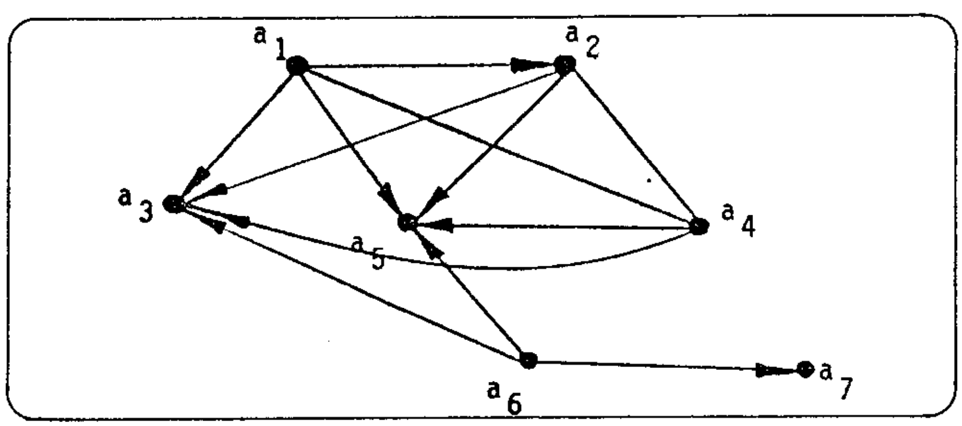
El grafo $G_{0.6}$ es:



El núcleo de este grafo es $N_{0.6}=\{a_1, a_6, a_7\}$ Verificamos que $N_{0.6} \subset N_{0.7}$ debido al hecho de que cuando agregamos los arcos corespondientes a un grado de credibilidad 0.6, ciertas acciones de $N_{0.7}$ se encuentran dominadas (a_2). Si tomamos $\alpha_3 {}_s=0.5$, tenemos

$S_{0.5}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	-	1	1	1	1	0	0
a_2	0	-	1	1	1	0	0
a_3	0	0	-	0	0	0	0
a_4	0	0	1	-	1	0	0
a_5	0	0	0	0	-	0	0
a_6	0	0	1	1	1	-	1
a_7	0	0	0	0	0	0	-

El grafo $G_{0.5}$ es



Su núcleo es $N_{0.5} = \{a_1, a_6\}$. Puede verificarse que $N_{0.5} \subset N_{0.6} \subset N_{0.7}$. Como no podemos escoger un umbral α inferior a 0.5, $N_{0.5}$ es el núcleo más pobre que podemos obtener. Si bien $N_{0.7}$ parece mejor que $N_{0.5}$ (pues corresponde a un grado de credibilidad más elevado, no permite la selección de un número reducido de acciones. Para llegar a ello estamos obligados a abatir el umbral. El tomador de decisiones está entonces ante una selección:

— aceptar $N_{0.7}$ que corresponde a un grado de credibilidad elevado pero en cuyo caso no se puede seleccionar la mejor acción pues el núcleo es demasiado rico; o bien

— aceptar $N_{0.5}$ que corresponde a un grado de credibilidad más modesto pero que permite seleccionar un número más restringido de acciones. Así, las acciones a_1 y a_6 son incomparables, pero dominan a todas las otras; sólo un estudio más fino permitirá hacer la diferencia entre los elementos del núcleo.

III-2. Clasificación de las acciones.

Para llegar a una clasificación u ordenación de las acciones son posibles dos enfoques. Podemos utilizar un método análogo a Electra II, es decir, un método basado en el criterio del camino más largo (sección III-2-1) o bien utilizar las propiedades de los subconjuntos borrosos (sección III-2-2).

III-2-1. Utilización del criterio del camino más largo.

Electra II considera dos relaciones de dominancia precisa: una relación de dominancia fuerte y una relación de dominancia débil. La primera sirve para consturir dos órdenes extremos, la segunda permite separar los *ex-aequo* a medida que aparecen en la construcción de los dos órdenes extremos. La relación de dominancia borrosa, de la cual disponemos, es más general que las utilizadas en Electra II. Cuantifica de alguna manera los adjetivos fuerte y débil. Para obtener una clasificación a partir de la definición de tal relación de dominancia, podemos utilizar el criterio del camino más largo en el grafo de dominancia borrosa modificada y/o en el grafo preciso más cercano de nivel α.

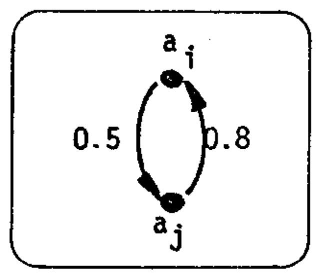
III-2-1-1.—En el grafo borroso modificado.

Consideremos la relación de dominancia borrosa definida en III-1. Como ya se ha señalado, podemos representar esta relación por un grafo de dominancia imprecisa cuyos arcos portan un valor comprendido entre cero y uno, que representan cierto grado de credibilidad. Denominamos grafo borroso modificado, $\underset{\sim}{G}^*$, al grafo definido por

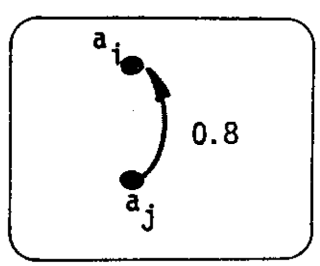
$$\text{arco } (a_i, a_j) \in \underset{\sim}{G}^* \text{ si solamente si } d(a_i, a_j) \geqslant d(a_j, a_i)$$

$$\notin \underset{\sim}{G}^* \text{ si y solamente si } d(a_i\ a_j) < d(a_j\ a_i)$$

Es decir que por cada par de acciones (a_i, a_j) sólo conservamos el grado de credibilidad más elevado. Por ejemplo, si tenemos



a_i domina a a_j con un grado de credibilidad 0.5, mientras que a_j domina a a_i con un grado de credibilidad igual a 0.8. Suprimimos el arco (a_i, a_j) para conservar el arco a_j, a_i). Guardamos solamente la dominancia más creíble



Estando definido el grafo impreciso modificado sólo resta aplicar el algoritmo definido para Electra II. La clasificación directa está definida por:

$$c'(a_i) = \lambda(a_i) + 1$$

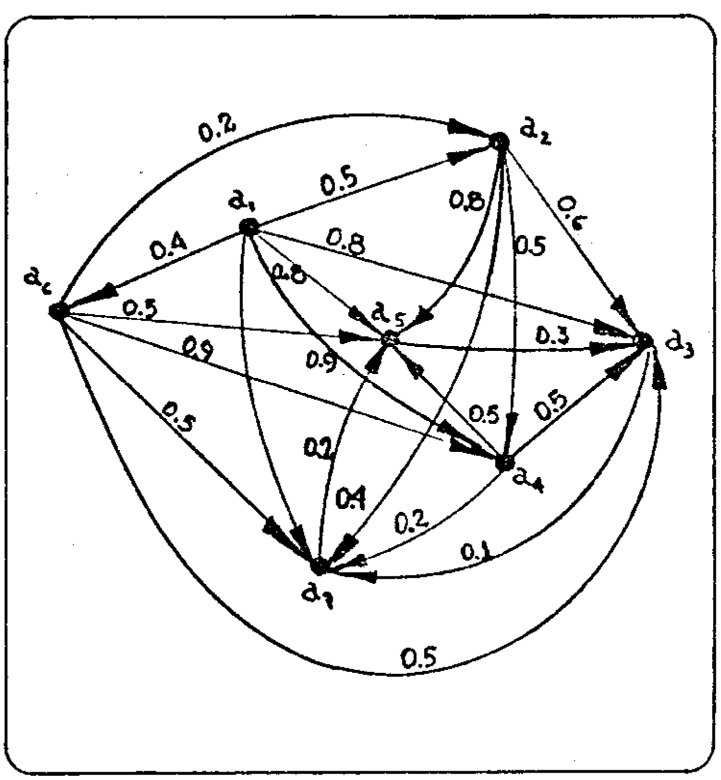
donde $c'(a_i)$ representa el rango del polo a_i, y $\lambda(a_i)$ la longitud del camino más largo que llega a a_i. La clasificación inversa se obtiene de la manera siguiente:

$$c''(a_i) = L - l(a_i) + 1$$

donde L representa la longitud del camino más largo que existe en el grafo y $l(a_i)$ la longitud del camino más largo que parte de a_i. La clasificación mediana de la acción a_i está entonces definida por:

$$c(a_i) = \frac{c'(a_i) + c''(a_i)}{2}$$

Por ejemplo, el grafo impreciso modificado relativo a la relación de dominancia imprecisa presentado en la página 14 es:



La clasificación directa es la siguiente:

$c'(a_1) = 1$	a_1
$c'(a_2) = 3$	a_6
$c'(a_3) = 7$	a_2
$c'(a_4) = 4$	a_4
$c'(a_5) = 6$	a_7
$c'(a_6) = 2$	a_5
$c'(a_7) = 5$	a_3

La clasificación inversa es:

$c''(a_1) = 1$	a_1
$c''(a_2) = 3$	a_6
$c''(a_3) = 7$	a_2
$c''(a_4) = 4$	a_4
$c''(a_5) = 6$	a_7
$c''(a_6) = 2$	a_5
$c''(a_7) = 5$	a_3

La clasificación final es:

a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_6
a_7

III-2-1-2. En el grafo de dominancia precisa precisa de nivel. α

Podemos aplicar este método en el grafo preciso más cercano del grafo de dominancia borrosa, es decir que no se considera la relación de dominancia borrosa sino la relación de dominancia precisa de nivel $\alpha = 0.5$. Si hiciécemos variar el umbral α, es posible definir otras clasificaciones. En general, a medida que α es más elevado, el grafo de dominancia precisa de nivel α poseerá menos arcos (excepto si los $d(a_i, a_j)$ son todos elevados) y será más difícil clasificar los ex-aequo y así habrá menos clases (es decir, que las clases comprenderán un número importante de objetos). Para verificar esto, basta comparar las clasificaciones deducidas de las relaciones de dominancia precisa $S_{0.5}$ y $S_{8.7}$ que aparecen en las páginas 14 y 15.

Clasificación de nivel 0.7:

a_1, a_6, a_2
a_7
a_3, a_4, a_5

Clasificación de nivel 0.5:

a_1
a_6
a_2
a_4, a_7
a_3, a_5

La clasificación de nivel 0.5 corresponde a exigencias moderadas en los grados de credibilidad, sin embargo es más detallada que la clasificación de nivel 0.7.

III-2-2. Utilización de las propiedades de los subconjuntos borrosos.

Podemos, siguiendo la naturaleza de la relación de dominancia borrosa, utilizar las propiedades de los subconjuntos borrosos a fin de obtener una clasificación de las diferentes acciones si la relación de dominancia borrosa es una relación de orden borroso, o bien una clasificación de las clases de similitud si la relación de dominancia borrosa es un preorden borroso reducible.

III-2-2-1. Orden inducido por una relación de orden borroso.

La relación de dominancia borrosa $\underset{\sim}{S}$ es una relación de orden borroso si es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Veamos cada una de estas propiedades.

Reflexividad. $\underset{\sim}{S}$ es reflexiva si $\forall\ (a_1,a_i) \in A \times A$

$$d(a_i, a_t) = 1$$

Prácticamente esta propiedad tiene un interés limitado y la dejaremos de lado.

Transitividad. $\underset{\sim}{S}$ es transitiva max-min si $\forall\ (a_i, a_j), (a_j, a_k), (a_i, a_k) \in A \times A$
$d(a_i, a_k) \geqslant \text{max-min } [d(a_i, a_j); d(a_j, a_k)]$

Esta definición de la transitividad generaliza la noción de transitividad en las relaciones precisas. (Ver: KAUFMANN: "Introduction a la théorie des sous-ensembles flous", página 80). Se pueden imaginar otras definiciones de la transitividad, por ejemplo la transitividad min-max o la transitividad max-producto. En general, la relación de dominancia borrosa no es transitiva, sin embargo podemos reducirnos a una relación transitiva tomando la cerradura transitiva S de la relación de dominancia borrosa

$$\underset{\sim}{\hat{S}} = \underset{\sim}{S} \cup \underset{\sim}{S^2} \cup \ldots \cup \underset{\sim}{S^k}$$

$\underset{\sim}{S^k}$ está definida por $d_{\underset{\sim}{S}}(a_i, a_k) = \text{Max-min } [d_{S}k\text{-}1\ G(a_i, a_j), d_{S}k\text{-}1\ (a_j, a_k]$. Determinamos pues a partir de una relación de dominancia borrosa $\underset{\sim}{S}$ una nueva relación de dominancia borrosa $\underset{\sim}{\hat{S}}$ transitiva. Pero trabajar con la cerradura transitiva $\underset{\sim}{\hat{S}}$ requiere ciertas precauciones, pues esta extrapolación desnaturaliza la verdadera relación de dominancia borrosa.

Antisimetría. $\underset{\sim}{S}$ es antisimétrica si
$\forall (a_i a\ a_j) \in A \times A$
$d(a_i, a_j) \neq (a_j, a_i)$

Esta propiedad prohibe al modelador asignar un mismo grado de credibilidad a las hipótesis "a_i es para el tomador de decisiones al menos tan buena como a_j" y "a_j es al menos tan buena como a_i". Esta propiedad es restrictiva en la medida en que está definida para cada pareja de acciones (a_i, a_j).

Si nuestra relación de dominancia borrosa satisface (a lo máximo) las dos últimas propiedades, entonces permitirá reducir un orden en el conjunto referencia A, por la relación

$$d(a_i, a_j) \geqslant d(a_j, a_i)$$

Representamos este orden por $a_i \geqslant a_j$. Para demostrarlo basta considerar el grafo antisimétrico preciso asociado a la relación de dominancia borrosa. El orden será total si $d(a_i, a_j) > d(a_j, a_i)$. Será parcial si al menos dos acciones no pueden ser comparadas.

Ejemplo

Consideremos la relación de dominancia borrosa siguiente:

$\underset{\sim}{S}$	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	-	0.8	0	0
a_2	0.2	-	0	0
a_3	0.3	0.4	-	0.1
a_4	0	0	0	-

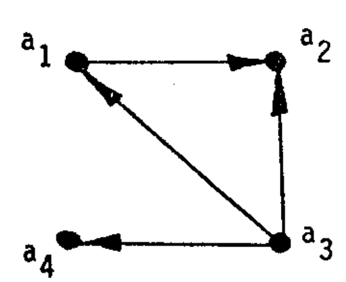
Se verifica que esta relación es transitiva max-min y antisimétrica. Se trata pues de una relación de orden borroso. El grafo antisimétrico preciso asociado a una relación borrosa antisimétrica es tal que

$$\forall (a_i, a_j) \in A \times A$$

$a_i \neq a_j$ y $d(a_i, a_j) > d(a_i, a_j \longrightarrow$
$(a_i, a_j) \in G$ y $(a_j, a_i) \notin G$
$a_i \neq a_j$ y $d(a_i, a_j) = d(a_j, a_i) \longrightarrow$
$(a_i, a_j) \in G$ y $(a_j, a_i) \notin G$

En el caso de la relación de dominancia borrosa anterior, el grifo antisimétrico preciso asociado a esta relación es:

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	-	1	0	0
a_2	0	-	0	0
a_3	1	1	-	1
a_4	0	0	0	-



El orden así definido es:

$$a_3 \geqslant a_1 \geqslant a_2$$
$$a_3 \geqslant a_4$$

Obtenemos un orden parcial pues el grafo antisimétrico preciso no es completo.

III-2-2-2. Orden inducido por las clases de similitud de un preorden borroso reducible.

Si la relación de dominación borrosa $\underset{\sim}{S}$ es transitiva (y reflexiva) podemos hacer una relación de preorden borroso. Esta relación de dominancia borrosa es pues más general que la relación de dominancia borrosa enunciada en III-2-2-1 pues no imponemos la antisimetría a la relación.

Si existe un subconjunto preciso $A_1 \subset A$ tal que:

$$\forall a_i, a_j \in A_1 \qquad d(a_i, a_j) = d(a_j, a_i),$$

es decir, si el modelador asigna grados de credibilidad idénticos a las hipótesis "a_i es para el tomador de decisiones al menos tan buena como a_j" y "a_j es para el tomador de decisiones tan buenas como a_i", entonces los elementos de A_1 forman entre ellos una relación de similitud llamada subrelación de similitud en el preorden A. Esta relación de similitud es maximal si no es una subrelación de similitud de ninguna otra.

Si la relación de dominancia borrosa $\underset{\sim}{S}$ es una preorden borroso reducible a subrelaciones maximales de similitud disjuntas, se muestra que las clases forman entre ellas una relación de orden borroso, si se considera el concepto de camino más fuerte de una clase a la otra. Podemos así ordenar las clases de similitud.

Recordemos que se llama camino más fuerte, representado por $C^*(x_i, x_j)$, de x_i a todo camino tal que

$$C^*(x_i, x_j) = \max_{C(x_i, x_j)} l(x_{i1} = x_i, x_{i2}, \ldots, x_{ir} = x_j)$$

donde $C(x_i, x_j)$ representa el conjunto de todos los caminos que van de x_i a x_j y $l(x_{i1}, \ldots, x_{ir})$ representa el valor del camino.

Ejemplo. (tomado de KAUFMANN en "Introduction a la théorie des sous-ensembles flous", página 104). Consideremos la relación de dominancia borrosa siguiente:

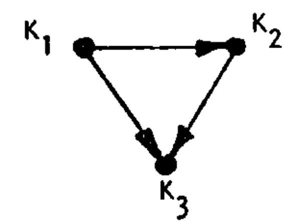
$\underset{\sim}{S}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	-	0.2	0.2	0.2	0.2	0.3	0.4
a_2	0.2	-	0.5	0.2	0.2	0.3	0.5
a_3	0.2	0.5	-	0.2	0.2	0.3	0.5
a_4	0.2	0.2	0.2	-	0.8	0.3	0.5
a_5	0.2	0.2	0.2	0.8	-	0.3	0.5
a_6	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	-	0.4
a_7	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	-

Esta relación borrosa es transitiva max-min (y reflexiva); se trata de un preorden borroso. Puede descomponerse en tres subrelaciones: $\underset{\sim}{S}_1$ relativa a $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$; $\underset{\sim}{S}_2$ relativa a $\{a_6\}$; y $\underset{\sim}{S}_3$ relativa a a_7. Los subconjuntos precisos $K_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $K_2 = \{a_6\}$ y $K_3 = \{a_7\}$ son tales que cada uno de sus elementos forman entre ellos una relación de similitud, llamada sub-relación de similitud. cada sub-relación de similitud es maximal, además son disjuntas. $\underset{\sim}{S}$ es pues un preorden borroso compuesto por tres sub-relaciones maximales de similitud disjuntas relativas a K_1, K_2, K_3. Considerando los caminos más fuertes que existen entre las clases de similitud obtenemos:

$\underset{\sim}{S}'$	K_1	K_2	K_3
K_1	—	0.3	0.5
K_2	0.2	—	0.5
K_3	0.2	0.2	—

Esta nueva relación es transitiva max-min, no simétrica (reflexiva); se trata pues de una relación de orden borroso; ahora, toda relación de orden borroso induce un orden referencial. El grafo antisimétrico asociado a esta relación de orden borroso es:

	K_1	K_2	K_3
K_1	-	1	1
K_2	0	-	1
K_3	0	0	-



El orden así obtenido es:

$$K_1 \geqslant K_2 \quad K_3$$

CONCLUSION

La introducción de la imprecisión a nivel de la relación de dominancia nos permite ser más flexibles en cuanto a la decisión final. En efecto, la relación de dominancia borrosa puede conducir a clasificaciones diferentes según se acepte el ser más o menos exigente respecto a la dominancia. Sin embargo, como ya lo hicimos remarcar al principio de esta exposición, este enfoque sólo es parcial; sin duda será necesario considerar criterios imprecisos. ¿Por qué obligar al tomador de decisiones a encerrar sus preferencias en una escala precisa cuando tiene una idea borrosa de la naturaleza de las cosas? ●

BIBLIOGRAFIA

—*BENACOUN R., ROY B., SUSSMAN B.*: Une méthode pour guider le choix en présence de points de vue multiples, Electre. SEMA, norte de travail nº 49 (juin 1966).

—*BERTIER, P., GAGEY D., DE MONTGOLFIER J., ROY, B.*: (1972). Choix de tracés autoroutiers en milieu suburbain: faut-il vraiment endommager des sites urbains et/ou forestiers? Lesquels?, journées de formation "Transports et agglomérations", commission pour le développement de l'information et de la recherche opérationnelle dans l'urbanisme et les transports (C.I.U.T.), NICE-4, 5 et 6 octobre 1972.

—*GUIGOU, J. L.*: (1974), Analyse des données et choix à critères multiples, Coll. Finance et Economie Apliquée, Vol. 45 Dunod 214 p.

KAUFMANN, A.: (1973) Introduction à la théorie des sous-ensembles flous, tome 1: Eléments théoriques de base, 411 p. Masson et Cie.

—*ROY, B.*: (1974) Critères multiples et modélisation des préférences. Revue d'Economie Politique nº 1. p. 1-44.

—*ROY, B.*: (1972) How outranking relation helps multiple criteria décision making, paper presented at the Seminar on multiple criteria decision making university of south Carolina, Columbia. October 26-27, 1972.

ROY, B., BERTIER, P.: (1972) La méthode Electre II, une application au média-planning. METRA nº 65 juin 1972.

—*ROY, B., BERTIER, P.*: (1971) La méthode Electre II (une méthode de classement en présence de critères multiples). METRA nº 142 Avril 1971.